WYKORZYSTANIE NARZĘDZIA „Solver” DO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ TRANSPORTOWYCH Z KRYTERIUM KOSZTÓW

Zadania transportowe

Zadania transportowe są najczęściej rozwiązywanymi problemami w praktyce z zakresu optymalizacji liniowej. Polegają one na wyznaczeniu planu przewozów jednorodnego produktu od *m* dostawców do *n* odbiorców minimalizującego koszty przewozu, gdy znane są wielkości podaży dostawców, popytu odbiorców i koszty jednostkowe przewozu od poszczególnych dostawców do poszczególnych odbiorców.

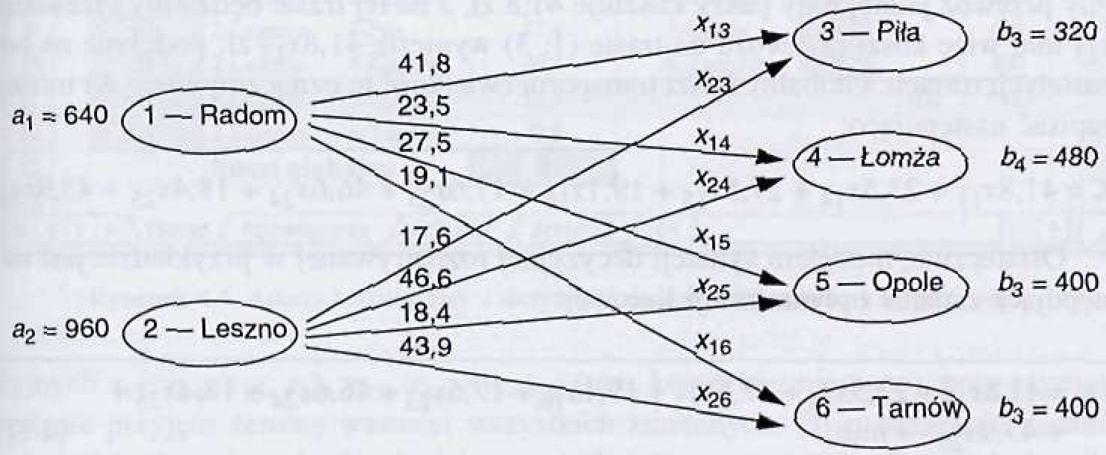
1. Przykład

Firma „KARMA" ma zakłady produkcyjne w Radomiu i Lesznie, w których produkuje paszę dla bydła, odpowiednio, w ilościach 800 i 1200 ton miesięcznie. Ma ona cztery hurtownie poza miejscami produkcji, które zlokalizowane są w Pile, Łomży, Opolu i Tarnowie. Piąta cześć miesięcznej produkcji każdego z zakładów pozostaje w magazynie lego zakładu na użytek miejscowych odbiorców, a pozostałą cześć produkcji (tzn. 1600 ton) przeznacza się w proporcjach, odpowiednio, 20%, 30%, 25% i 25%, dla hurtowni w Pile, Łomży, Opolu i Tarnowie. Znając koszty przewozu jednej tony paszy z poszczególnych zakładów do poszczególnych hurtowni, należy wyznaczyć plan przewozów minimalizujący globalny koszt transportu. Dane do problemu przedstawiono w tablicy1.

Sieciowe ujecie rozważanego problemu zilustrowano na rys. 1. Węzły o numerach l i 2 reprezentują dostawców z wielkościami podaży a_1\ i a_2, natomiast węzły o numerach 3, 4, 5, 6 reprezentują odbiorców z wielkościami popytu b_3, b_4, b_5, b_6 Poszukujemy przewozów (przepływów) na poszczególnych łukach grafu.

Podaż \ Popyt	*Piła — 320*	*Łomża — 480*	*Opole — 400*	*Tarnów — 400*
Radom — 640	41,8	23,5	27,5	19,1
Leszno — 960	17,6	46,6	18,4	43,9

Tablica 4.1. Wielkości podaży dostawców (t), popytu odbiorców (t) i koszty jednostkowe przewozów (zł/t)



Rysunek 1. Sieciowe ujecie problemu transportowego w firmie „KARMA"

Mamy zatem osiem niewiadomych (zmiennych decyzyjnych), które oznaczyliśmy symbolami x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}; zmienne te mają następującą interpretację: x_{ij} jest liczbą ton paszy przewożoną od dostawcy o numerze i do odbiorcy o numerze j.

4.2.2. Model

Zauważmy, że w rozpatrywanym przykładzie globalna podaż jest równa globalnemu popytowi ($a_1 + a_2 = b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 1600$ t). Zadanie transportowe o tej własności nazywamy *zadaniem zbilansowanym*. W takiej sytuacji od każdego dostawcy trzeba wywieźć dokładnie tyle, ile wynosi jego podaż i do każdego odbiorcy dowieźć należy dokładnie tyle, ile wynosi jego popyt. Formalnie można łatwo to zapisać w postaci równości:

$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 640$ (z Radomia trzeba wywieźć 640 t),
$x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 960$ (z Leszna trzeba wywieźć 960 t),
$x_{13} + x_{23} = 320$ (do Piły trzeba dowieźć 320 t),
$x_{14} + x_{24} = 480$ (do Łomży trzeba dowieźć 480 t),
$x_{15} + x_{25} = 400$ (do Opola trzeba dowieźć 400 t),
$x_{16} + x_{26} = 400$ (do Tarnowa trzeba dowieźć 400 t).

Powyższe równości stanowią podstawowy układ warunków ograniczających modelu. Warto zapamiętać, że z każdym węzłem sieci związany jest jeden warunek ograniczający w modelu. Oprócz tych warunków należy także uwzględnić warunki nieujemności zmiennych decyzyjnych, tzn.:

$x_{ij} \geqslant 0$ dla $i = 1, 2$; $j = 3, 4, 5, 6$ (wielkości przewozów są liczbami nieujemnymi).

Równie łatwo można utworzyć funkcję celu, czyli zapisać formalnie globalny koszt transportu podlegający minimalizacji. Ponieważ na trasie (1, 3) z Radomia do Piły przewóz jednej tony paszy kosztuje 41,8 zł, a na tej trasie będziemy przewozić x_{13} ton, więc koszt przewozu na trasie (1, 3) wyniesie $41{,}8x_{13}$ zł: podobnie na pozostałych trasach. Globalny koszt transportu (wielkość tę oznaczmy literą K) można zapisać następująco:

$$K = 41{,}8x_{13} + 23{,}5x_{14} + 27{,}5x_{15} + 19{,}1x_{16} + 17{,}6x_{23} + 46{,}6x_{24} + 18{,}4x_{25} + 43{,}9x_{26}.$$

Ostatecznie, modelem sytuacji decyzyjnej rozpatrywanej w przykładzie jest następujące zadanie optymalizacji liniowej:

$$K = 41{,}8x_{13} + 23{,}5x_{14} + 27{,}5x_{15} + 19{,}1x_{16} + 17{,}6x_{23} + 46{,}6x_{24} + 18{,}4x_{25} + 43{,}9x_{26} \to \min, \tag{4.1}$$

przy warunkach:

$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 640 \quad \text{(warunek dla węzła 1)}, \tag{4.2}$$

$$x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 960 \quad \text{(warunek dla węzła 2)}, \tag{4.3}$$

$$x_{13} + x_{23} = 320 \quad \text{(warunek dla węzła 3)}, \tag{4.4}$$

$$x_{14} + x_{24} = 480 \quad \text{(warunek dla węzła 4)}, \tag{4.5}$$

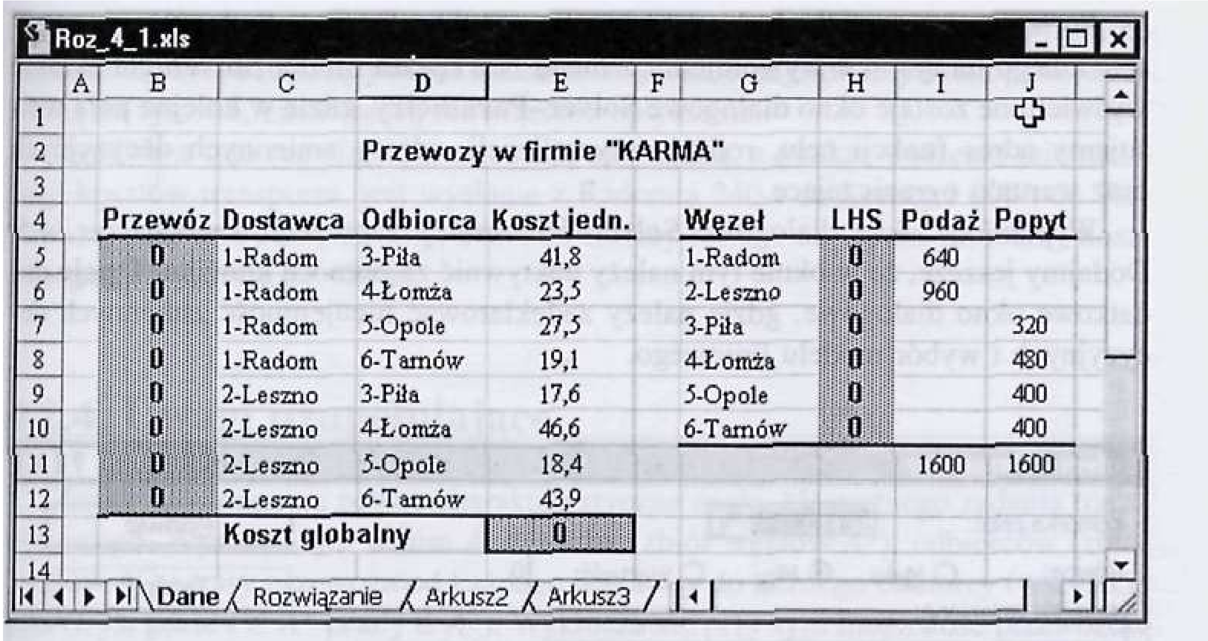
$$x_{15} + x_{25} = 400 \quad \text{(warunek dla węzła 5)}, \tag{4.6}$$

$$x_{16} + x_{26} = 400 \quad \text{(warunek dla węzła 6)}, \tag{4.7}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, 2;\ j = 3, 4, 5, 6. \tag{4.8}$$

3. **Implementacja** w Excelu

Na rys. 4 przedstawiono przykładową formę arkusza kalkulacyjnego umożliwiającego wyznaczenie optymalnego planu przewozów dla firmy „KARMA" za pomocą modułu Solver. Część komórek arkusza przeznaczono dla danych zadania i komentarzy, w szczególności w odpowiednie pola wpisano koszty jednostkowe przewozu, wielkości podaży dostawców i popytu odbiorców. Cześć komórek przeznaczono natomiast dla wartości zmiennych decyzyjnych i formuł niezbędnych do wykorzystania modułu **Solver**. W arkuszu widocznym na rys. 4 są to komórki zacieniowane. Komórki B5:B12 przeznaczono kolejno dla wartości zmiennych decyzyjnych x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26} (tzw. komórki zmieniane), przy czym na wstępie przyjęto zerowe wartości wszystkich zmiennych. Po rozwiązaniu zadania w komórkach tych widoczny będzie optymalny plan przewozów. Pozostałe komórki zacieniowane przeznaczono dla formuł. W tablicy 2 wyjaśniono, jaka formuła wpisana jest do jakiej komórki, a także jaką wyraża ona wartość {element w modelu), np. komórka **E13** zawiera formułę wyrażającą wartość funkcji celu, a wiec sumę iloczynów zmiennych decyzyjnych *7.* komórek **B5:B12** przez koszty jednostkowe z komórek **E5:E12**. Komórki **H5:H1**0 zawierają natomiast formuły wyrażające wartości lewych stron warunków ograniczających modelu (LHS)ˉ. Na przykład, do komórki **H5** wpisana jest formuła wyrażająca wartość lewej strony pierwszego warunku ograniczającego (4.2), a więc sumę $x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$.



Przewóz	Dostawca	Odbiorca	Koszt jedn.	Węzeł	LHS	Podaż	Popyt
0	1-Radom	3-Piła	41,8	1-Radom	0	640	
0	1-Radom	4-Łomża	23,5	2-Leszno	0	960	
0	1-Radom	5-Opole	27,5	3-Piła	0		320
0	1-Radom	6-Tarnów	19,1	4-Łomża	0		480
0	2-Leszno	3-Piła	17,6	5-Opole	0		400
0	2-Leszno	4-Łomża	46,6	6-Tarnów	0		400
0	2-Leszno	5-Opole	18,4			1600	1600
0	2-Leszno	6-Tarnów	43,9				
	Koszt globalny		0				

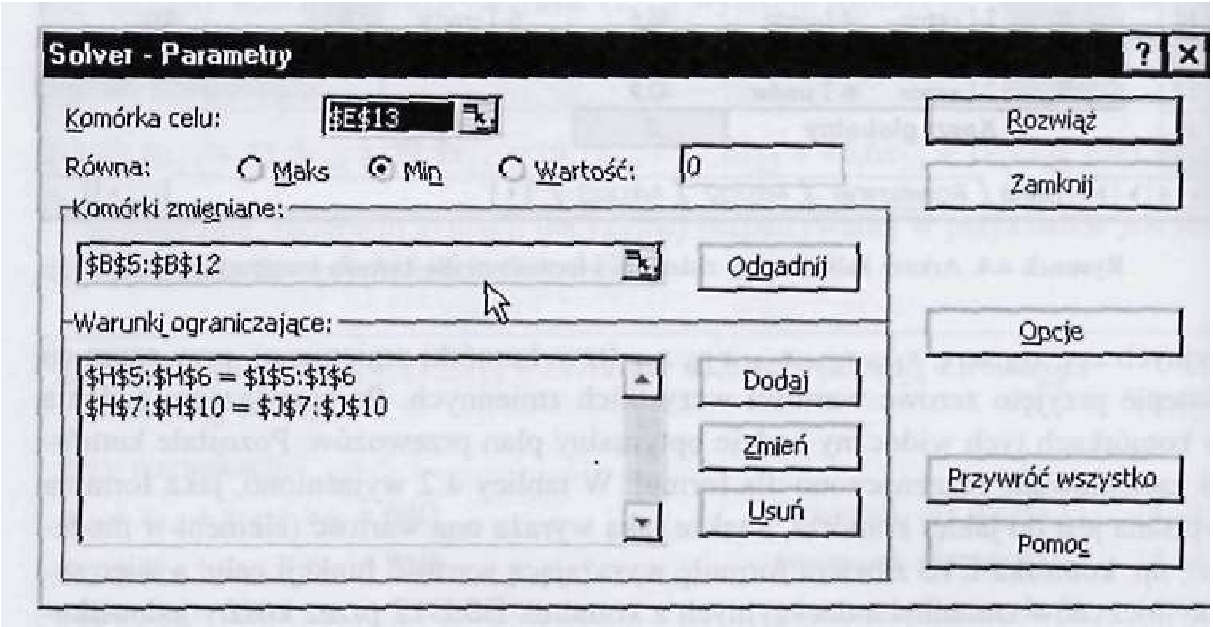
***Rysunek** 4. Arkusz/. kalkulacyjny z danymi i formułami dla zadania transportowego*

Tablica 2. Wykaz formuł dla zadania transportowego

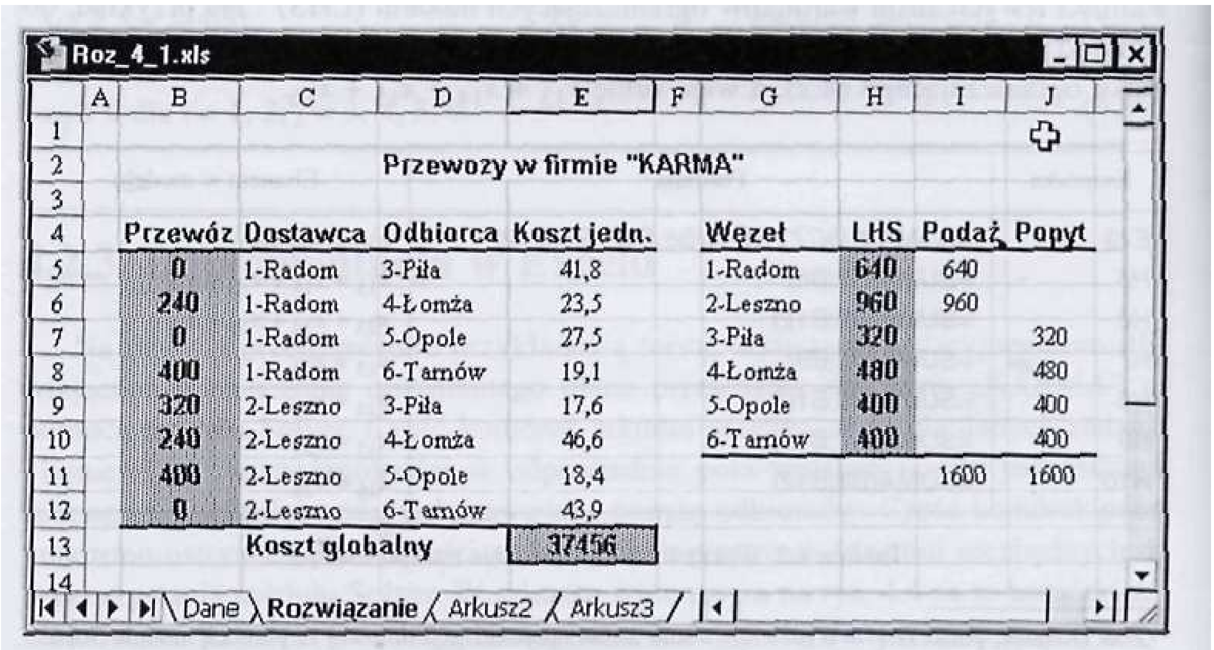
Komórka	Formuła	Element w modelu
E13	=SUMA.ILOCZYNÓW(B5:B12; E5:E12)	Funkcja celu
H5	=SUMA(B5:B8)	$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$
H6	=SUMA(B9:B12)	$x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26}$
H7	=SUMA(B5;B9)	$x_{13} + x_{23}$
H8	=SUMA(B6;B10)	$x_{14} + x_{24}$
H9	=SUMA(B7;B11)	$x_{15} + x_{25}$
H10	=SUMA(B8;B12)	$x_{16} + x_{26}$

Po wpisaniu wszystkich danych oraz formuł do arkusza kalkulacyjnego przedstawionego na rys. 4 wywołujemy z menu **Narzędzia** moduł Solver. Na ekranie wyświetlone zostaje okno dialogowe **Solver-Parametry**, gdzie w kolejne pola wpisujemy adres funkcji celu, rodzaj optymalizacji, adresy zmiennych decyzyjnych oraz warunki ograniczające.

Wypełnione okno dialogowe **Solver-Parametry** zaprezentowano na rys. 5. Dodajmy jeszcze, że w oknie tym należy uaktywnić za pomocą klawisza Opcje dodatkowe okno dialogowe, gdzie należy zadeklarować nieujemność zmiennych decyzyjnych i wybór modelu liniowego.



Rysunek 5. Wypełnione okno 7 parametrami dla zadania Iran s portowego



Roz_4_1.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2				Przewozy w firmie "KARMA"						
3										
4		Przewóz	Dostawca	Odbiorca	Koszt jedn.		Węzeł	LHS	Podaż	Popyt
5		0	1-Radom	3-Piła	41,8		1-Radom	640	640	
6		240	1-Radom	4-Łomża	23,5		2-Leszno	960	960	
7		0	1-Radom	5-Opole	27,5		3-Piła	320		320
8		400	1-Radom	6-Tarnów	19,1		4-Łomża	480		480
9		320	2-Leszno	3-Piła	17,6		5-Opole	400		400
10		240	2-Leszno	4-Łomża	46,6		6-Tarnów	400		400
11		400	2-Leszno	5-Opole	18,4				1600	1600
12		0	2-Leszno	6-Tarnów	43,9					
13			Koszt globalny		37456					
14										

Dane / Rozwiązanie / Arkusz2 / Arkusz3

***Rysunek** 6. Arkusx kalkulacyjny po uzyskaniu **rozwiązania** zadania transportowego*

Po wykonaniu omówionych wyżej czynności wybieramy opcje **Rozwiąż,** co uruchamia proces rozwiązywania zadania. W efekcie uzyskujemy tablice przedstawioną na rys. 4.6, zawierającą rozwiązanie optymalne.

Zgodnie z tym rozwiązaniem decyzją optymalną, z punktu widzenia minimalizacji kosztów transportu, jest wystanie z Radomia 240 t do Łomży i 400 t do Tarnowa, a z Leszna 320 t do Piły, 240 t do Łomży i 400 t do Opola. Globalny koszt transportu wyniesie 37 456 zł.

4. Uwagi uzupełniające

Zwróćmy uwagę na pewne charakterystyczne cechy klasycznego zadania transportowego. Wyróżnia się w nim dostawców {zbiór węzłów A^+, odbiorców (zbiór węzłów A^-) i trasy przewozu od każdego dostawcy do każdego odbiorcy (wszystkie luki *(i, j)*, gdzie i $\notin$ A^+ oraz j $\notin A^-$). Wyklucza się przy tym możliwość przewozów miedzy dostawcami lub miedzy odbiorcami . Zakłada się ponadto, że każda trasa przewozu ma nieograniczoną przepustowość (tzn. na każdej trasie można przewieźć dowolną ilość ładunku)..

Zapiszemy teraz ogólnie model zadania transportowego, aby móc rozważyć także zadania niezbilansowane (przypadki przewagi globalnej podaży nad popytem lub przewagi globalnego popytu nad podażą). Przyjmijmy oznaczenia:

a_i — podaż i-tego dostawcy, gdzie $i \in A^+$,
b_j — popyt j-tego odbiorcy, gdzie $j \in A^-$,
c_{ij} — koszt jednostkowy przewozu na trasie (i, j), gdzie $i \in A^+$ oraz $j \in A^-$,
x_{ij} — szukana wielkość przewozu na trasie (i, j), gdzie $i \in A^+$ oraz $j \in A^-$.

W każdym zadaniu transportowym może wystąpić jeden z trzech następujących przypadków:

(1) $\sum_{i \in A^+} a_i = \sum_{j \in A^-} b_j$ (globalny popyt jest równy globalnej podaży),

(2) $\sum_{i \in A^+} a_i > \sum_{j \in A^-} b_j$ (przewaga globalnej podaży nad globalnym popytem),

(3) $\sum_{i \in A^+} a_i < \sum_{j \in A^-} b_j$ (przewaga globalnego popytu nad globalną podażą).

W przypadku (1) mamy do czynienia z zadaniem transportowym zbilansowanym; jego modelem — w zapisie ogólnym — jest zadanie optymalizacji liniowej postaci:

$$\sum_{i \in A^+} \sum_{j \in A^-} c_{ij} x_{ij} \to \min , \qquad (4.9)$$

przy warunkach:

$$\sum_{j \in A^-} x_{ij} = a_i , \quad i \in A^+, \qquad (4.10)$$

$$\sum_{i \in A^+} x_{ij} = b_j , \quad j \in A^-, \qquad (4.11)$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i \in A^+, \; j \in A^-. \qquad (4.12)$$

Zadanie transportowe jest *niezbilansowane*, gdy zachodzi jedna z nierówności, (2) lub (3). W przypadku (2), kiedy przeważa podaż, równości w warunkach ograniczających (4.10) należy zastąpić nierównościami typu ≤, nie wszystko bowiem zostanie od dostawców wywiezione[5]. Podobnie, w przypadku (3), kiedy przeważa popyt, równości w warunkach ograniczających (4.11) należy zastąpić nierównościami typu ≥, nie wszystkie popyty odbiorców zostaną bowiem zaspokojone. Tak wiec, przed przystąpieniem do rozwiązywania zadania transportowego za pomocą Solvera trzeba sprawdzić, który z przypadków, (1), (2) czy (3), zachodzi.

Zadania transportowe, rozpatrywane w tym punkcie, zbilansowane lub niezbilansowane, mają dwie ważne własności:

Własność 1. ***Każde zadanie transportowe ma rozwiązanie optymalne.***

Własność 2. ***Jeśli wielkości podaży i popytu w zadaniu transportowym sq całkowitoliczbowe, to istnieje całkowitoliczbowe rozwiązanie optymalne tego zadania.***

Zwróćmy jeszcze uwagę na możliwość różnych interpretacji funkcji celu w zadaniach transportowych. Jeśli np. c_{ij} jest odległością liczoną w kilometrach od /-tego dostawcy do j-tego odbiorcy, a wielkości przewozów x_{ij} wyrażane są w tonach, to wartości funkcji celu wyraża się w tonokilometrach. Minimalizacja funkcji celu w tym przypadku jest więc minimalizacją pracy przewozowej.