WYKORZYSTANIE NARZĘDZIA „Solver” DO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENIA „Problem przydziału”

Problem przydziału

Przykład

Firma „KARMA” zamierza w okresie letnim przeprowadzić konserwację swoich urządzeń;

- mieszalników,
- taśmociągów,
- pakowarek,
- pojazdów.

Zebrano oferty cenowe na wykonanie prac konserwacyjnych od pięciu firm, uzyskując kalkulację kosztów przedstawioną w tablicy 1. Ponieważ okres prac jest bardzo krótki, postanowiono zlecić konserwacje każdego urządzenia innej firmie. Jak dokonać wyboru tych firm, aby zminimalizować koszty konserwacji?

Tablica.1.

Koszty konserwacji urządzeń (w zł) w firmie „KARMA"

Urządzenie / Firma	6. Mieszalniki	7. Taśmociągi	8. Pakowarki	9. Pojazdy
1. Mechanik	2800	3600	2000	5500
2. Remonty S.A.	2300	3000	2400	6400
3 Trybus	3100	4200	2500	5000
4. ABC	2100	3800	2500	6000
5.Techmech	1900	3200	2200	6200

W rozpatrywanym przykładzie firmy pełnią funkcję dostawców (a zatem $A^+ = \{1, 2, 3, 4, 5\}$), a urządzenia pełnią funkcję odbiorców ($A^- = \{6, 7, 8, 9\}$).

Wielkości podaży dostawców i popytu odbiorców są przy tym równe jedności, tzn. $a_i = 1$ dla $i \in A^+$ oraz $b_j = 1$ *dla* $j \in A^-$. Mamy 20 zmiennych decyzyjnych x_{ij}, gdzie $i \in A^+$ *oraz* $j \in A^-$, *o* następującej interpretacji:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy firma o numerze } i \text{ ma konserwować sprzęt o numerze } j, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Teraz natomiast w tablicy 2 zapiszemy wszystkie zmienne decyzyjne. Zauważmy, że warunki ograniczające (4.14) i (4.15) wyrażają następujące zależności:

- suma zmiennych w każdym wierszu tablicy 2 musi być nie większa niż l,

• suma zmiennych w każdej kolumnie tablicy 2 musi być równa 1.

Oznacza to, że:

• każda firma może być wybrana co najwyżej raz do prac konserwacyjnych (w każdym wierszu wystąpi co najwyżej raz zmienna decyzyjna o wartości 1),

• każde urządzenie konserwować będzie dokładnie jedna firma (w każdej ko lumnie wystąpi dokładnie raz zmienna decyzyjna o wartości 1).

Tablica 2.

Wykaz zmiennych decyzyjnych dla zadania przydziału

Firma \ Urządzenie	6. Mieszalniki	7. Taśmociągi	8. Pakowarki	9. Pojazdy
1. Mechanik	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}
2. Remonty S.A.	x_{26}	x_{27}	x_{28}	x_{29}
3. Trybus	x_{36}	x_{37}	x_{38}	x_{39}
4. ABC	x_{46}	x_{47}	x_{48}	x_{49}
5. Techmech	x_{56}	x_{57}	x_{58}	x_{59}

Koszt *K* konserwacji wszystkich urządzeń jest oczywiście sumą iloczynów zmiennych decyzyjnych *x-,:* z (tablicy 2 przez odpowiednie koszty *c-,:* podane w tablicy 1. Ostatecznie należy zatem rozwiązać następujące zadanie optymalizacji liniowej :

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=6}^{9} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min, \tag{4.17}$$

przy warunkach:

$$x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{19} \leqslant 1, \tag{4.18}$$

$$x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{29} \leqslant 1, \tag{4.19}$$

$$x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{39} \leqslant 1, \tag{4.20}$$

$$x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{49} \leqslant 1, \tag{4.21}$$

$$x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{59} \leqslant 1, \tag{4.22}$$

$$x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{56} = 1, \tag{4.23}$$

$$x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{47}+x_{57} = 1, \tag{4.24}$$

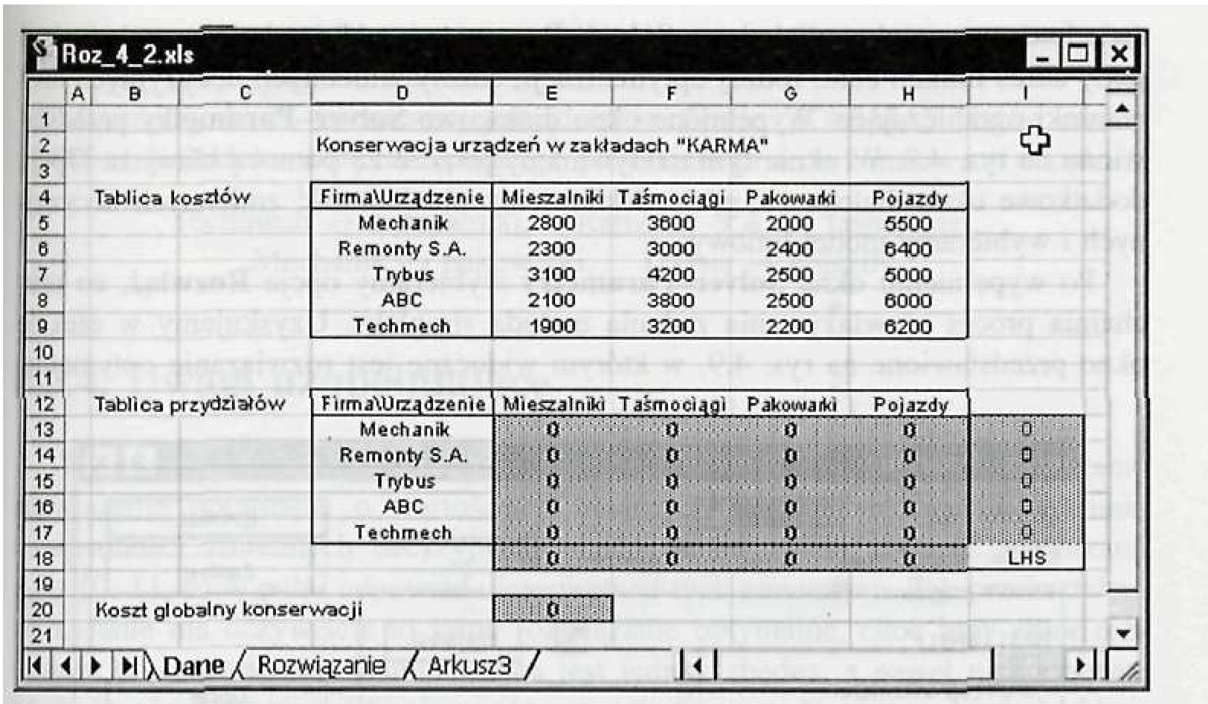
$$x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+x_{58} = 1, \tag{4.25}$$

$$x_{19}+x_{29}+x_{39}+x_{49}+x_{59} = 1, \tag{4.26}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad i \in \{1,2,3,4,5\},\ j \in \{1,2,3,4,5\}. \tag{4.27}$$

Implementacja w Excelu

Na rys. 1 przedstawiono przykładową postać arkusza kalkulacyjnego, pozwalającą za pomocą **Solvera** wybrać w optymalny sposób firmy, którym należy zlecić konserwacje urządzeń w firmie „KARMA". W arkuszu wpisano dane i niezbędne komentarze, a komórki zacieniowane, tak jak w poprzednim przykładzie, przeznaczono na zmienne decyzyjne i formuły wymagane przez **Solver.** Komórki E13:H17 zawierają wartości zmiennych decyzyjnych (komórki zmieniane), po rozwiązaniu pozycje o wartości 1 wyznaczą poszukiwany przydział firm do poszczególnych prac konserwacyjnych. Pozostałe komórki zacieniowane zawierają formuły.


Roz_4_2.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2				Konserwacja urządzeń w zakładach "KARMA"					
3									
4		Tablica kosztów		Firma\Urządzenie	Mieszalniki	Taśmociągi	Pakowarki	Pojazdy	
5				Mechanik	2800	3600	2000	5500	
6				Remonty S.A.	2300	3000	2400	6400	
7				Trybus	3100	4200	2500	5000	
8				ABC	2100	3800	2500	6000	
9				Techmech	1900	3200	2200	6200	
10									
11									
12		Tablica przydziałów		Firma\Urządzenie	Mieszalniki	Taśmociągi	Pakowarki	Pojazdy	
13				Mechanik	0	0	0	0	0
14				Remonty S.A.	0	0	0	0	0
15				Trybus	0	0	0	0	0
16				ABC	0	0	0	0	0
17				Techmech	0	0	0	0	0
18					0	0	0	0	LHS
19									
20		Koszt globalny konserwacji			0				
21									

Rysunek 1. *Arkusz kalkulacyjny z danymi dla zadania przydziału*

W komórce E20 wpisana jest wartość funkcji celi (4.17), w komórkach I13:I17 wpisane są wartości lewych stron warunków ograniczających (4.18) - (4.22), natomiast w komórkach E18:H18 — wartości lewych stron warunków (4.23) - (4.26). W tablicy 3 podano wykaz wszystkich użytych formuł, dla każdej podano przy tym adres komórki zawierającej lę formułę (pierwsza kolumna tablicy) oraz funkcje, której wartość obliczana jest za pomocą danej formuły (ostatnia kolumna tablicy).

Tablica 3

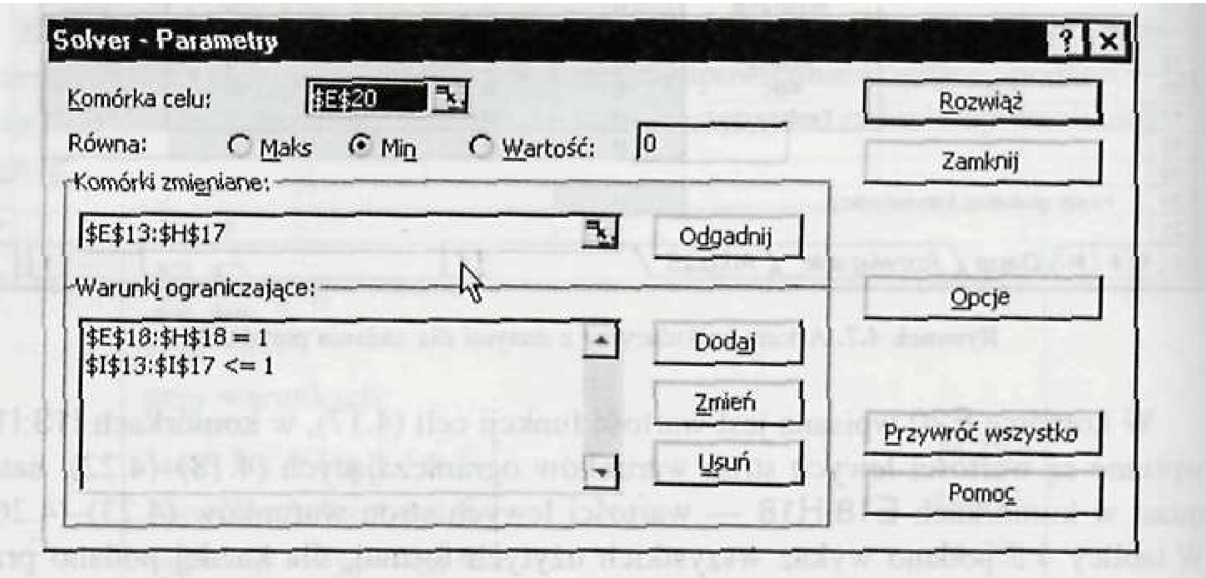
Wykaz formuł dla zadania przydziału

Komórka	Formuła	Element w modelu
E20	=SUMA.ILOCZYNÓW(E5:H9;E13:H17)	Funkcja celu
I13	=SUMA(E13:H13)	$x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{19}$
I14	=SUMA(E14:H14)	$x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{29}$
I15	=SUMA(E15:H15)	$x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{39}$
I16	=SUMA(E16:H16)	$x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{49}$
I17	=SUMA(E17:H17)	$x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{59}$
E18	=SUMA(E13:E17)	$x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{56}$
F18	=SUMA(F13:F17)	$x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{46}+x_{57}$
G18	=SUMA(G13:G17)	$x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+x_{58}$
H18	=SUMA(H13:H17)	$x_{19}+x_{29}+x_{39}+x_{49}+x_{59}$

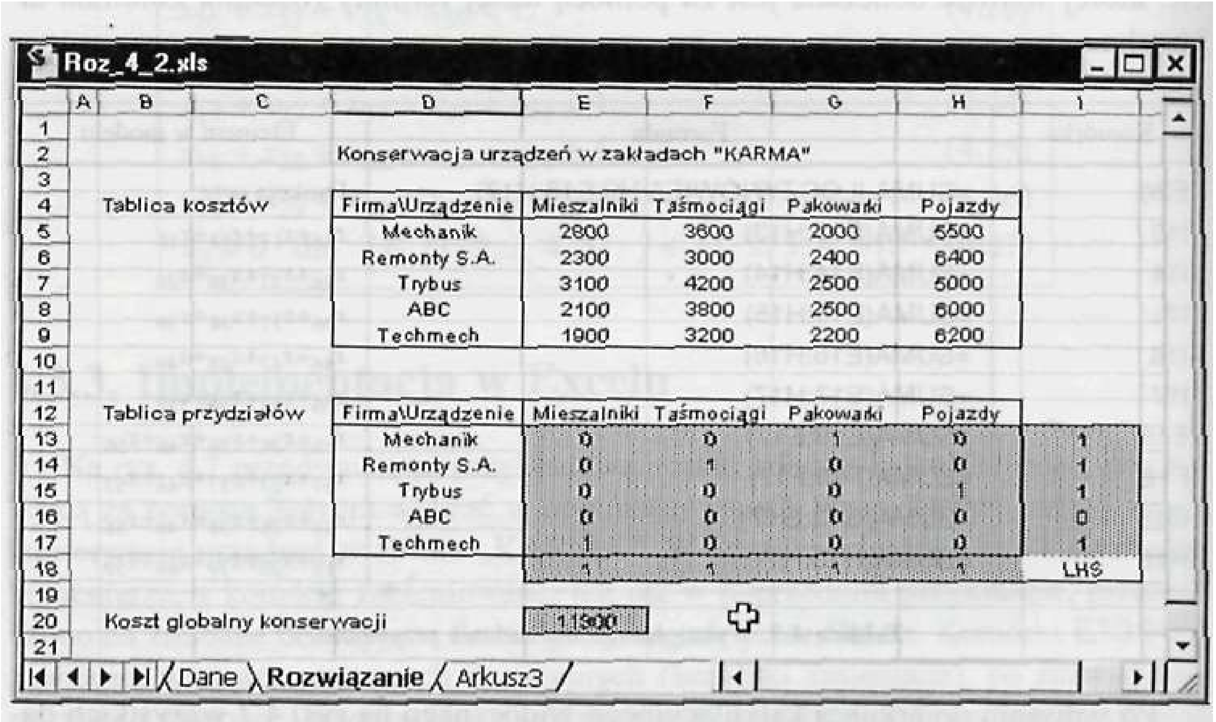
Po wpisaniu do arkusza kalkulacyjnego widocznego na rys. 1 wszystkich danych oraz formuł wywołujemy z menu **Narzędzia** moduł **Solver**.

Na ekranie wyświetlone zostaje okno dialogowe **Solver - Parametry**, gdzie w kolejne pola wpisujemy adres funkcji celu, rodzaj optymalizacji, adresy zmiennych decyzyjnych oraz, warunki ograniczające. Wypełnione okno dialogowe **Solver - Parametry** przedstawiono na rys. 2. W oknie tym uaktywniamy jeszcze za pomocą klawisza Opcje dodatkowe okno dialogowe, gdzie deklarujemy nieujemność zmiennych decyzyjnych i wybieramy model liniowy.

Po wypełnieniu okna **Solver - Parametry** wybieramy opcje Rozwiąż, co uruchamia proces rozwiązywania zadania metodą simpleks. Uzyskujemy w efekcie okno przedstawione na rys. 3, w którym widoczne jest rozwiązanie optymalne.



Rysunek 2. Wypełnione okno **Solvcr - Paramtry** dla zadaniu przydziału



Roz_4_2.xls

Konserwacja urządzeń w zakładach "KARMA"

Tablica kosztów

Firma\Urządzenie	Mieszalniki	Taśmociągi	Pakowarki	Pojazdy
Mechanik	2800	3600	2000	5500
Remonty S.A.	2300	3000	2400	6400
Trybus	3100	4200	2500	5000
ABC	2100	3800	2500	6000
Techmech	1900	3200	2200	6200

Tablica przydziałów

Firma\Urządzenie	Mieszalniki	Taśmociągi	Pakowarki	Pojazdy	
Mechanik	0	0	1	0	1
Remonty S.A.	0	1	0	0	1
Trybus	0	0	0	1	1
ABC	0	0	0	0	0
Techmech	1	0	0	0	1
	1	1	1	1	LHS

Koszt globalny konserwacji 11900

Dane | Rozwiązanie | Arkusz3

Rysunek 3. Arkusz. kalkulacyjny z rozwiązaniem optymalnym dla zadania przydziału

Poszukiwany przydział firm do poszczególnych prac konserwacyjnych opisany jesl zmiennymi decyzyjnymi o wartości 1.

Minimalny koszt konserwacji urządzeń w firmie „KARMA" będzie równy 11 900 zł, jeśli dokona się następującego przydziału firm do konserwacji urządzeń:

Techmech → mieszalniki. Remonty S.A. —> taśmociągi**,**

Mechanik → pakowarki, Trybus —> pojazdy.

Uwagi uzupełniające

Wiemy, że rozwiązując zadanie przydziału (4.13)-(4.16), zawsze uzyskamy rozwiązanie optymalne o wartościach binarnych (zero - jedynkowych). Warunki nieujemności zmiennych decyzyjnych (4.16) można żalem zastąpić warunkami $x_{ij} \in [0,1]$ co w pełni odpowiada interpretacji tych zmiennych. Tak przekształcone zadanie ma oczywiście to samo rozwiązanie optymalne, choć inny zbiór rozwiązań dopuszczalnych. Zamiana taka jest jednak zbędna, a nawet niekorzystna. Może bowiem sugerować konieczność rozwiązywania zadania metodami charakterystycznymi dla programowania całkowitoliczbowego, a więc metodami trudniejszymi niż zwykła optymalizacja liniowa. Warto zatem pamiętać, aby nie deklarować binarnych wartości zmiennych decyzyjnych przy rozwiązywaniu zadań przydziału , a tylko nieujemność tych zmiennych.